

۱- گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا از عبارت انتگرال می گیریم.

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\int dx} \int S dx = \underbrace{x + x^2}_{\times x} + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \longrightarrow \int S dx = \frac{x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} S = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

۲- گزینه ۲ درست است.

توجه شود که مجموع جملات سری به فرم بازگشتی بیان شده است و این سوال را نباید با دنباله های بازگشتی اشتباه بگیریم. با بازنمودن و نوشتن چند جمله ابتدایی مجموع جزئی، می توان از روی الگوی ایجاد شده فرمول سری را حدس زد (تبدیل به یک سری هندسی می شود).

$$\text{فرض مسئله } S_1 = 2 \Rightarrow S_2 = S_1 + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow S_3 = S_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\text{حدس: } S_n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{q=\frac{2}{3}<1} S = 2 + \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2 + 2 = 4$$

۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$A = \sum \frac{1}{(2^n - 1)} \quad a^u - 1 \overset{u \rightarrow \infty}{\sim} u \ln a \quad \sim \quad A = \sum \frac{\ln 2}{n} \xrightarrow[p=1]{p\text{-series}} \text{واگرا}$$

$$B \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}^3} \right)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon n \sqrt{n}} \xrightarrow[p=\frac{3}{2} > 1]{p\text{-series}} \text{همگرا}$$

۴- گزینه ۳ صحیح است.

جهت بررسی همگرایی سری در بازه‌ای مشخص باید بازه همگرایی سری را بررسی کنیم.

$$\text{همواره برقرار است} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \frac{|x|}{\frac{n}{e}} \xrightarrow{\forall x} 0 < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} < 1 \Rightarrow \text{آزمون کوشی} \rightarrow \text{شرط همگرایی}$$

یعنی سری موردنظر مستقل از مقدار X همواره همگراست.

۵- گزینه ۲ صحیح است.

برای بررسی همگرایی سری اول، از فرمول استرلینگ استفاده می‌کنیم و شرط لازم همگرایی را بررسی می‌کنیم. (فرمول

$$\text{استرلینگ: } (n!) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

$$\text{شرط لازم: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon^n \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi} \right)^2}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4n\pi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n\pi}{\sqrt{2}\sqrt{2n\pi}} = \infty \neq 0$$

سری شرط لازم همگرایی را ندارد و واگراست.

برای بررسی همگرایی سری دوم، چون مشخصاً شرط لازم را دارد، از هم ارزی‌های $\cosh u$, $\cos u$ زمانی که $u \rightarrow 0$ میل کند استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} \cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2!} \\ \cosh u \sim 1 + \frac{u^2}{2!} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1 + \frac{1}{2n^2}}{1 - \frac{1}{2n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n^2 + 1}{2n^2 - 1}$$

$$u \rightarrow 1$$

حال از هم‌ارزی $(\ln u \sim u - 1)$ عبارت جمله عمومی را به یک عبارت جبری (فرم p-سری) تبدیل می‌کنیم.

$$\Rightarrow S_2 \sim \sum \left(\frac{2n^2 + 1}{2n^2 - 1} - 1 \right) = \sum \frac{2}{2n^2 - 1} \sim \sum \frac{1}{n^2} \xrightarrow[p=2 > 1]{p\text{-series}} \underline{\underline{\text{همگرا}}}$$